Teoretická část - 11.2.2021

1. (a) Definujte dělení intervalu, normu dělení, zjemnění dělení a horní a dolní součty (4 body).

   (b) Nechť $\overline{D}, D^*, D^{**} \in \mathfrak{D}([3,5])$ jsou dělení a nechť f je omezená funkce na $[3,5]$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   i. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathfrak{D}([3,5])$ takové, že $|D| < \varepsilon$.

   ii. nechť D^* je zjemnění $\overline{D}$, potom $|D^*| < |\overline{D}|$,

   iii. nechť D^* a D^{**} jsou zjemnění $\overline{D}$, $|D^{**}| < |D^*|$, potom D^{**} je zjemněním D^*,

   iv. existuje dělení $D \in \mathfrak{D}([3,5])$ takové, že $S(f,D) = s(f,D)$,

   v. existuje dělení $D \in \mathfrak{D}([3,5])$ takové, že $S(f,D) > s(f,D)$,

   vi. pro každé $D \in \mathfrak{D}([3,5])$ platí $S(f,D) \geq s(f,D)$,

   vii. existuje funkce g omezená na $[3,5]$ taková, že $S(g,D) > s(g,D)$ pro každé $D \in \mathfrak{D}([3,5])$.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

2. (a) Definujte Taylorův polynom (1 bod).
   (b) Zformlujte větu o Peanově tvaru zbytku a větu o jemnějších podmínkách pro existenci extrémů (2 body).
   (c) Dokažte větu o jemnějších podmínkách pro existenci extrémů (stačí jednu část) (1 bod).
   (d) Mějme sudou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci 5. řádu na $\mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      i. funkce $f^{(k)}$ je sudá pro $k = 2, 4$,
      ii. funkce $f^{(k)}$ je lichá pro $k = 1, 3, 5$,
      iii. má-li funkce $f^{(4)}$ v bodě 0 lokální maximum, potom je f polynom
      iv. má-li funkce $f^{(5)}$ v bodě 0 lokální maximum, potom je f polynom.

   Vše řádně zdůvodněte (4 body).

3. (a) Definujte limitu posloupnosti (1 bod).
   (b) Definujte limitu funkce a funkci spojitou v bodě (2 body).
   (c) Zformlujte a dokažte Heineho větu (3 body).
   (d) Mějme funkci f definovanou na intervalu $(-3, 4)$ která je spojitá ve všech bodech $a \in (-3, 4) \setminus \mathbb{Q}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      i. f je spojitá na $(-3, 4)$
      ii. je-li $f(x) = 7$, $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, potom $f(0) = 7$
      iii. je-li $f(x) = 7$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$, potom $f(\sqrt{3}) = 7$.

      Vše řádně zdůvodněte (2 body).